###### 28

###### azad

###### دانشگاه آزاد اسلامي

######  واحد تهران مرکز

**موضوع:**

**منحنی‌ها، انواع منحنی و توابع برداری**

**فهرست**

منحنیها درحالت کلی- فرم پارامتری یک منحنی................................................. (1)

طول قوس به عنوان پارامتر- انحنا................................................................. (8)

نابع برداری.............................................................................................(13)

نمودارتوابع پارامتری................................................................................ (17)

حدوپیوستگی توابع برداری......................................................................... (20)

مشتق تابع برداری.................................................................................... (26)

منحی وار............................................................................... .... ...........(29)

فرمول های مشتق گیری............................................................................. (30)

قوانین مشتق گیری ضرب توابع برداری......................................................... (31)

توابع برداری با طول ثابت......................................................................... (34)

بردارسرعت وشتاب توابع برداری............................................................... (36)

بردارهای یکه ی ممان وقائم....................................................................... (38)

انتگرال توابع برداری............................................................................... (43)

طول قوس یک منحنی.............................................................................. (47)

تابع طول قوس....................................................................................... (50)

پارامترسازی برحسب طول قوس................................................................ (51)

منحنی های تکه تکه هموار..........................................................................(53)

دستگاه )TNBکنج فرنه)......................................................................... (53)

صفحه بوسان وعمود..............................................................................(55)

انحناو تاب...........................................................................................(59)

انحنا منحنی در صفحه............................................................................(65)

شعاع انحناودایره ی انحنا(دایره ی بوسان)...................................................(66)

مراحل بدست آوردن دایره ی بوسان...........................................................(67)

مولفه های ممان وقائم سرعت وشتاب..........................................................(68)

تاب منحنی............................................................................................(73)

تمرین..................................................................................................(74)

منابع وماخذ..........................................................................................(84)

**1-منحنی‌ها در حالت کلّی – فرم پارامتری یک منحنی:**

**در ابتدا می‌خواهیم فرم پارامتری یک منحنی را مشخص کنیم. لذا لازم است که درشروع، پارامتر را معرفی می‌کنیم:**

**فرض می‌کنیم c نمودار تابع پیوسته‌ی** $y=∅(x)$ ***و* p یک نقطه‌ی متغیر روی این منحنی *باشد.* t *را به عنوان یک پارامتر انتخاب می‌کنیم، هرگاه تغییر مکان، نقطه‌ی* p *روی منحنی* c *به‌وسیله‌ی* t *به طور منحصر به فردی تعیین گردد.***

***مثلاً در شکل فوق، می‌توان موقعیت* p *را با مقادیر*** $\left(t+1\right)$ ***تعیین کرد یا حتی با*** $e^{t}$ ***، موضع* p *مشخص می‌شود؛* *زیرا با معلوم بودن*** $\left(t+1\right)$ ***و یا*** $e^{t}$ ***مقدار t را به طور منحصر به فردی مشخص می‌شود و در نتیجه موضع p به عنوان تابعی از t مستلزم تعیین*** $x و y$ ***به صورت توابعی از t است. لذا جفت معادله‌ی*** $y=g(t)$ ***و*** $x=f(t)$ ***معادلات پارامتری منحنی c خوانده می‌شوند. زیرا با تغییر*** $p=(x,y)$ *منحنی* ***c حاصل می‌شود. در این جا فرض می‌کنیم که***$f و g$ ***دارای یک قلمرو بوده و بر این قلمرو پیوسته می‌باشد.***

***مثال(1) منحنی به معادله‌ی قطبی*** $α\leq θ\leq β$ ***و*** $r=f(θ)$ *را می‌توان با توجه به اینکه* $y=r\sin(θ)$ ***و*** $x=r\cos(θ)$ ***به فرم پارامتری زیر نشان داد:***

$y=f\left(θ\right)\sin(θ () α\leq θ\leq β)$ ***و*** $x=f\left(θ\right)\cos(θ)$ ***که زاویه‌‌ی*** $θ$ ***به عنوان پارامتر مشخص شده است.***

***مثال(2)در نظر بگیرید معادله‌ی دایره‌ی*** $x^{2}+y^{2}=a^{2}$ ***دارای نمایش پارامتری به صورت*** $y=α\sin(t)$ ***و*** $x=α\cos(t)$ ***است که*** $t$ ***زاویه‌ای است که*** $→$ ***با جهت مثبت محور xها می‌سازد؛ زیرا هر t، p منحصر به فردی را مشخص می‌کند و یا حتی***

$y=α\sin(\left(lnt\right))(1\leq t\leq 2π$***و*** $x=α\cos((lnt))$ ***همان دایره‌ی*** $x^{2}+y^{2}=α^{2}$ ***را نمایش می‌دهد.***

**همچنین می‌توان برای معادله‌ی فوق، طول قوس** $(s)$ **را به عنوان پارامتر در نظر بگیریم؛ زیرا هر s یک p منحصر به فرد را معلوم می‌کند. داریم:** $s= αt$ **و بنابراین:**

$\left\{\begin{array}{c}x=α\cos((\frac{s}{α}))\\y=α\sin((\frac{s}{α}))\end{array}\right.$ **c=**

$0\leq s\leq 2πα$

**که فرم پارامتری دایره‌ی** $x^{2}+y^{2}=α^{2}$ **بر حسب پارامتر طول قوس می‌باشد.**

**مثال(3) منحنی** $(0\leq t\leq 2π)$$y=b\sin(t)$ **و** $x=α\cos(t)$ **یک بیضی است، اگر که** $α\ne b$ **و** $α و b>0$ ***باشند.***

***حل: از خذف t از دو معادله‌ی بالا داریم*** $\frac{y}{b}=\sin(t)$ ***و*** $ \frac{x}{α}=\cos(t)$

***و در نتیجه:*** $\frac{x^{2}}{α^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}=cos^{2}t+sin^{2}t=1$

**که معادله یک بیضی است.**

**مثال(4) منحنی** $(-\infty <t<\infty )$$y=b\sin(ht)$ **و** $x=α\cos(ht)$ **که در آن** $α , b$ **هر دو مثبت‌اند را در نظر می‌گیریم.**

**حل: با حذف t از دو معادله داریم:** $\frac{y^{2}}{b^{2}}=sin^{2}ht$ ***و*** $\frac{x^{2}}{α^{2}}=cos^{2}ht$

***بنابراین:*** $\frac{x^{2}}{α^{2}}-\frac{y^{2}}{b^{2}}=cos^{2}ht-sin^{2}ht=1$ *که معادله هذلولی است.*

*مثال(5) فرض کنیم که یک دایره به شعاع* $α$ **در امتداد یک خط افقی بدون لغزش، بغلطد. فرم پارامتری منحنی‌ای را بیابید که به‌وسیله‌ی نقطه‌ی p از محیط آن رسم می‌شود.**

****

**حل: با فرض اینکه خط افقی محور xها زاویه‌ی دوران دایره باشد، با توجه به شکل داریم:**

$x=\left|0Q\right|=\left|0\acute{0}\right|-\left|\acute{0}Q\right|=\left|0\acute{0}\right|-a\sin(t)$

 **اما** $ \left|0\acute{0}\right|$**مساوی طول قوس** $\acute{0}p$**است؛ چرا که دایره بدون لغزش می‌غلطد. بنابراین** $\left|0\acute{0}\right|=at$ **است.**

**لذا** $x=at-a\sin(t=a(t-\sin(t)))$ ***است و اما :***

$y=\left|\acute{0}\acute{A}\right|-a\cos(t)=a(1-\cos(t))$

***توجه کنید که این منحنی نمودار یک تابع متناوب با دوره‌ی تناوب*** $2πα$ ***مثل*** $y=∅(x)$ ***است. این منحنی که توسط p به‌وجود می‌آید،*** $چرخزاد ))$**)) نام دارد و نشان دادیم که دارای این معادلات پارامتری است:**

$(-\infty <t<\infty )$$y=a(1-\cos(t))$ **و** $x=a(t-\sin(t))$

**قضیه (1):منحنی** $\left(α\leq t\leq b\right) $$y=g(t)$ **و** $x=f(t)$ **را که در آن fو g در بازه‌ی باز** $(α,b)\in \left[α,b\right]$ ***مشتق پذیرند را در نظر بگیرید. فرض می‌کنیم که*** $\frac{dx}{dt}=\acute{f(t)}$ ***در*** $(α,β)$ ***تغییر علامت نمی‌دهد یا صفر نمی‌شود. در این صورت منحنی*** $\left(α\leq t\leq b\right) $$y=g\left(t\right) $ ***و*** $x=f(t)$ ***نمودار یک تابع مشتق‌پذیر مانند*** $f\left(α\right)<x<f(β)$ ***و*** $y=∅(x)$ ***است***